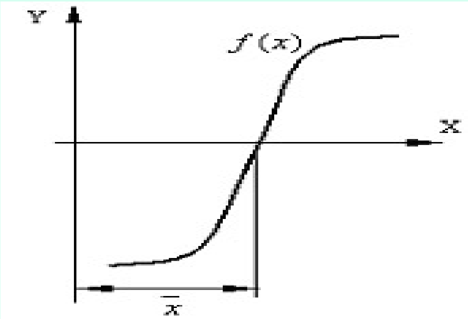
Чисельний розв’язок рівнянь

Необхідність знаходження коренів нелінійних рівнянь зустрічається в розрахунках систем автоматичного управління і регулювання , власних коливань машин і конструкцій, в задачах кінематичного аналізу та синтезу, плоских і просторових механізмів та інших завданнях. Необхідно вирішити це рівняння , тобто, знайти його корінь .



Не будь-яке рівняння може бути вирішено точно. Проте, точне рішення рівняння не завжди є необхідним. Задачу відшукання коренів рівняння можна вважати практично вирішеною , якщо ми зуміємо знайти корені рівняння з заданою ступенем точності. Для цього використовуються наближені (чисельні) методи вирішення .

Процес визначення коренів алгебраїчних і трансцендентних рівнянь складається з 2 етапів:

- відділення коренів , тобто визначення інтервалів ізоляції [a , b] , всередині якого лежить кожен корінь рівняння ;
- уточнення коренів , тобто звуження інтервалу [a , b] до величини рівної заданої ступеня точності ε .

Для алгебраїчних і трансцендентних рівнянь придатні одні й ті ж методи уточнення наближених значень дійсних коренів :

- метод половинного розподілу (метод дихотомії) ;
- метод простих ітерацій ;
- метод Ньютона (метод дотичних) ;
- модифікований метод Ньютона (метод січних) ;
- метод хорд та ін .

Чисельний розв’язок рівнянь

Метод половинного ділення (МЕТОД дихотомії)

Для уточнення кореня методом половинного розподілу послідовно здійснюємо наступні операції:

Ділимо інтервал навпіл:

$$t = \frac{a+b}{2} - \text{координаты середины отрезка}[a, b];$$

В якості нового інтервалу ізоляції приймаємо ту половину інтервалу, на кінцях якого функція має різні знаки.

Для цього:

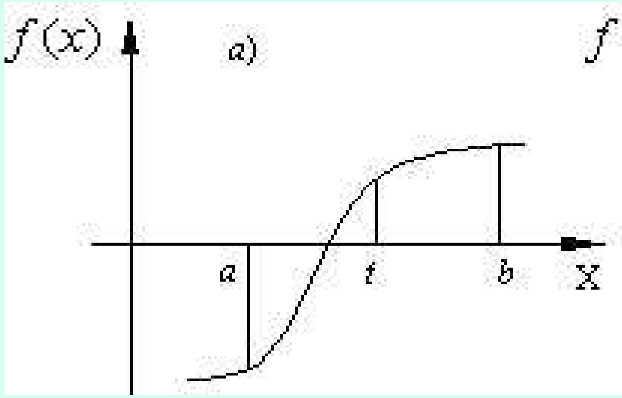
a) Обчислюємо значення функції f (x) в точках a і t.

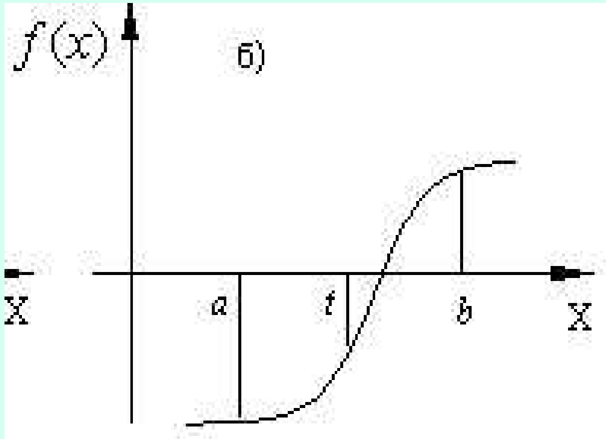
b) Перевіряємо: якщо f (a) f (t) <0, то корінь знаходиться в лівій половині інтервалу [a, b] (рис.а). Тоді відкидаємо праву половину інтервалу і робимо переприсвоєному b = t.

c) Якщо f (a) f (t) <0 не виконується, то корінь знаходиться в правій половині інтервалу [a, b] (рис.б). Тоді відкидаємо ліву половину і робимо переприсвоєному a = t. В обох випадках ми отримаємо новий інтервал [a, b] в 2 рази менший попереднього.

Процес, починаючи з пункту 1, циклічно повторюємо до тих пір, поки довжина інтервалу [a, b] стане рівної або меншої заданої точності, тобто

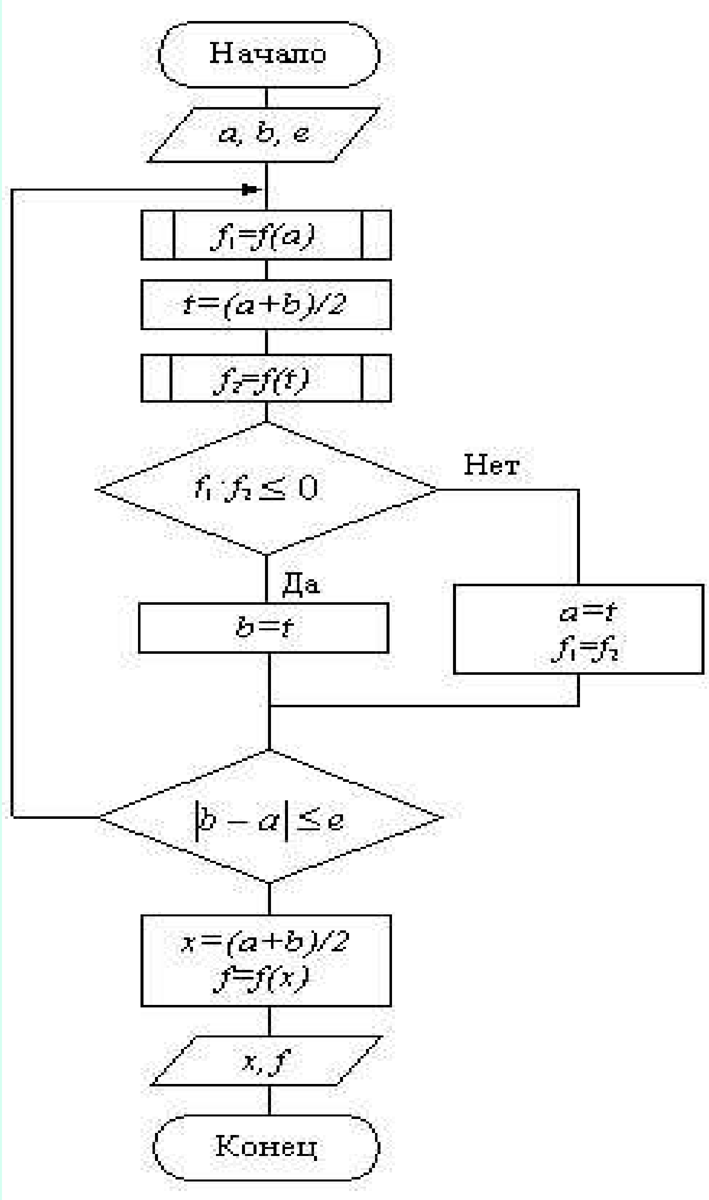
$$|b - a| \le \varepsilon.$$





Чисельний розв'язок рівнянь

МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДІЛЕННЯ (МЕТОД ДИХОТОМІЇ)



Чисельний розв’язок рівнянь

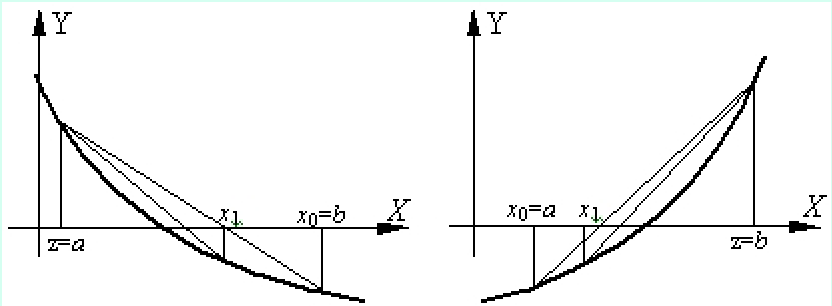
МЕТОД ХОРД

Метод ЗАСНОВАНИЙ на заміні функції f(x) на кожному кроці пошуку хордою, перетин якої з віссю X дає приблизно корінь.

При цьому в процесі пошуку сімейство хорд можуть будуватися:

а) при фіксованому лівому кінцю хорд, тобто, a, тоді початкова точка x0=b (рис.а);

б) при фіксованому правому кінцю хорд, тобто, b, тоді початкова точка x0=a (рис.б);



В результаті ітераційний процес сходження до кореня реалізується рекуррентной формулою:

для випадку а) $x_{n-1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a);$

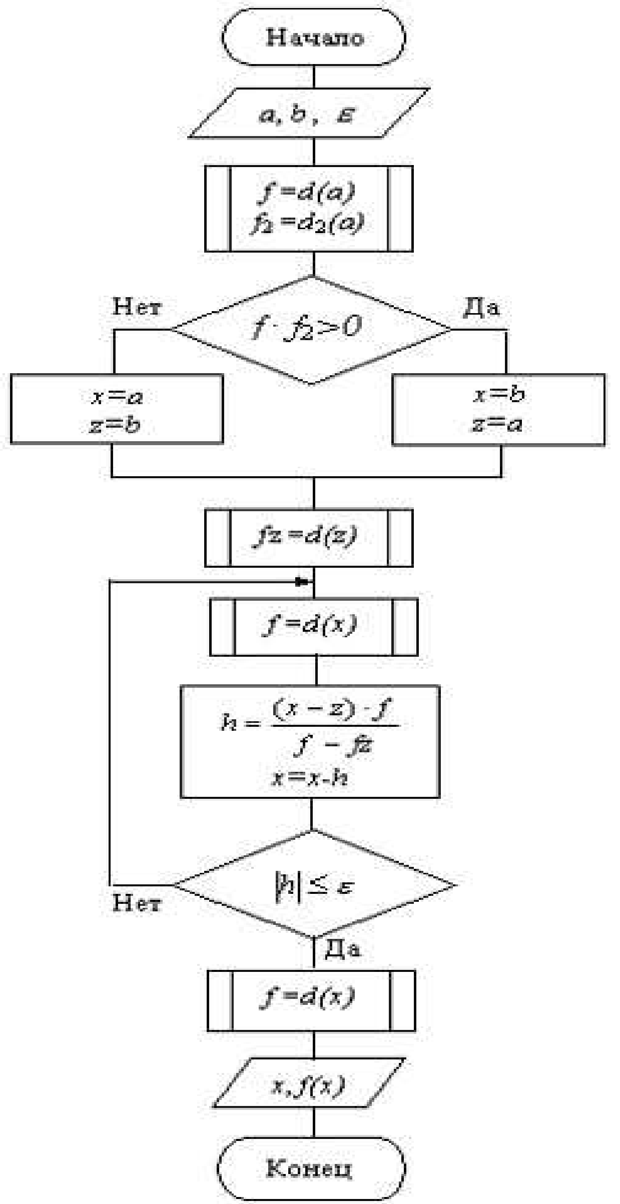
для випадку б) $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f(x_n) - f(b)}(x_n - b);$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \cdot (x_n - x_{n-1})$$

Процес пошуку продовжується до тих пір, доки не виконається умова $|x_{n+1} - x_n| \leq$ или $|h| \leq \varepsilon.$

Чисельний розв'язок рівнянь

МЕТОД ХОРД



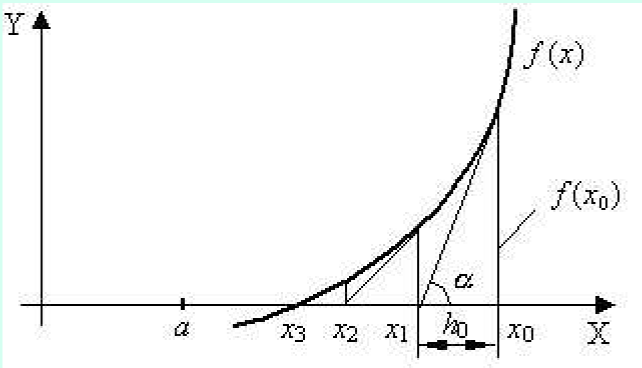
Чисельний розв’язок рівнянь

МЕТОД НЬЮТОНА (МЕТОД СІЧНИХ)

Метод Ньютона відноситься до градієнтним методам, в яких для знаходження кореня використовується значення похідної.

Метод Ньютона заснований на заміні вихідної функції f (x), на кожному кроці пошуку дотичній, проведеної до цієї функції. Перетин дотичній з віссю X дає наближення кореня (Рис).

Виберемо початкову точку x0 = b (кінець інтервалу ізоляції). Знаходимо значення функції в цій точці і проводимо до неї дотичну, перетин якої з віссю X дає нам перше наближення кореня x1.



$$h_0 = \frac{f(x_0)}{\mathrm{tg}(\alpha)} = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \qquad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

В результаті ітераційний процес сходження до кореня реалізується рекуррентною формулою

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Процес пошуку продовжуємо до тих пір, поки не виконається умова: $|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon$

У цьому методі для обчислення похідних на кожному кроці пошуку використовується чисельне диференціювання за формулою:

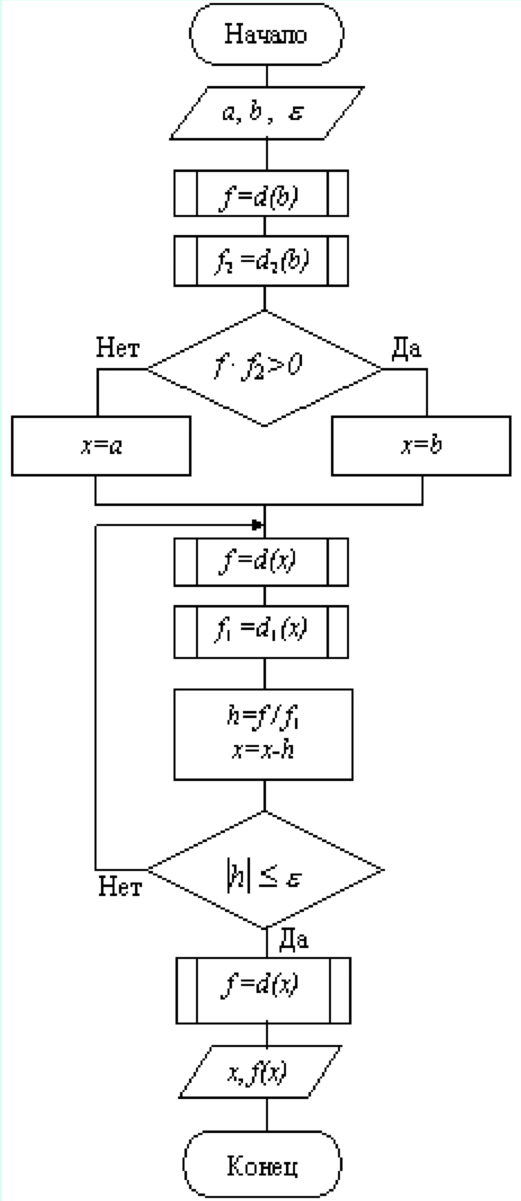
$$f'(x) = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

Тоді рекуррентна формула буде мати вигляд:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\Delta x}{f(x_n+\Delta x)-f(x_n)}, \qquad \Delta x \approx \varepsilon$$

Чисельний розв’язок рівнянь

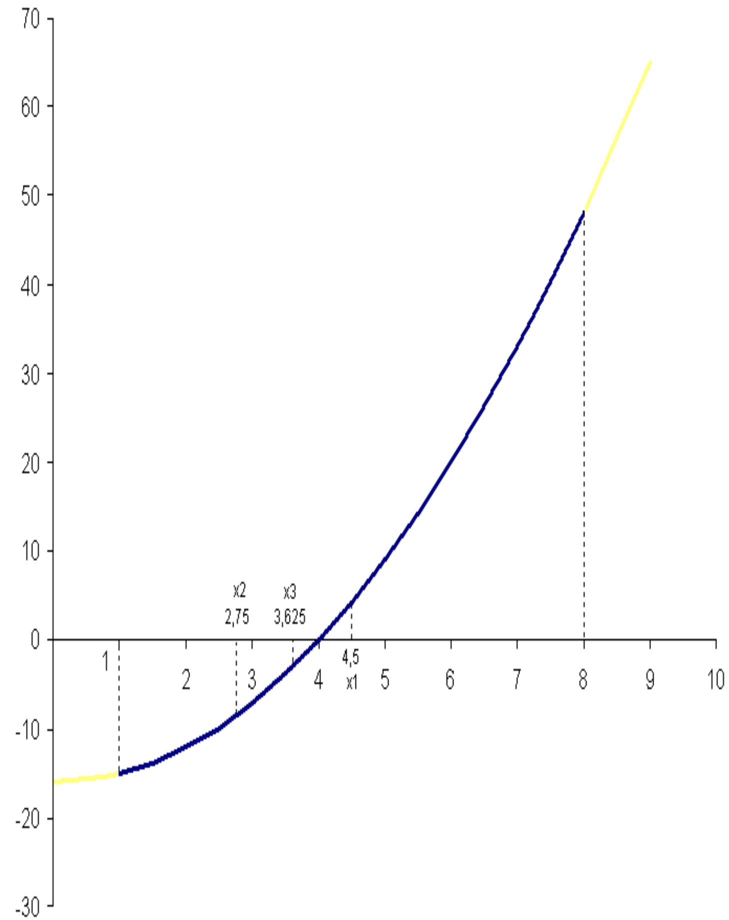
МЕТОД НЬЮТОНА (МЕТОД СІЧНИХ)



Чисельний розв'язок рівнянь

МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДІЛЕННЯ (МЕТОД ДИХОТОМІЇ)

Функція $y = x^2 - 16$ на інтервалі від 1 до 8



$f(a) = a^2 - 16 = 1^2 - 16 = -15$

$f(b) = b^2 - 16 = 8^2 - 16 = 48$

Ділимо відрізок a - b навпіл

$x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{1+8}{2} = 4{,}5 \qquad f(x_1) = x_1^2 - 16 = 4{,}5^2 - 16 = 4{,}25$

Перевіряємо

$f(a) \cdot f(x_1) = -15 \cdot 4бб{,}2 = -63{,}75$

від'ємне, значить корень знаходится між a і x_1

Перепривоїмо $b = x_1 = 4{,}5 \quad a = 1 \qquad f(a) = a^2 - 16 = 1^2 - 16 = -15$

$f(b) = b^2 - 16 = 4{,}5^2 - 16 = 4{,}25$

$x_2 = \frac{a+b}{2} = \frac{1+4{,}5}{2} = 2{,}75 \qquad f(x_2) = x_2^2 - 16 = 2{,}75^2 - 16 = -8{,}43$

Перевіряємо

$f(a) \cdot f(x_2) = -15 \cdot -8{,}43 = 126{,}56$

додатнє, значить корінь знаходиться "з іншої сторони" між b і x_2

Переприсвоїмо $a = x_2 = 2{,}75 \quad b = 4{,}5 \qquad f(a) = a^2 - 16 = 2{,}75^2 - 16 = -8{,}43$

$f(b) = b^2 - 16 = 4{,}5^2 - 16 = 4{,}25$

$x_3 = \frac{a+b}{2} = \frac{2{,}75+4{,}5}{2} = 3{,}62 \qquad f(x_3) = x_3^2 - 16 = 3{,}62^2 - 16 = -2{,}86$

Перевіряємо

$f(a) \cdot f(x_3) = -8{,}43 \cdot -2{,}86 = 24{,}12$

додатнє, значить корень знаходиться "з іншої сторони" між b і x_3

Переприсвоїмо $a = x_3 = 3{,}62 \quad b = 4{,}5 \qquad f(a) = a^2 - 16 = 3{,}62^2 - 16 = -2{,}89$

$f(b) = b^2 - 16 = 4{,}5^2 - 16 = 4{,}25$

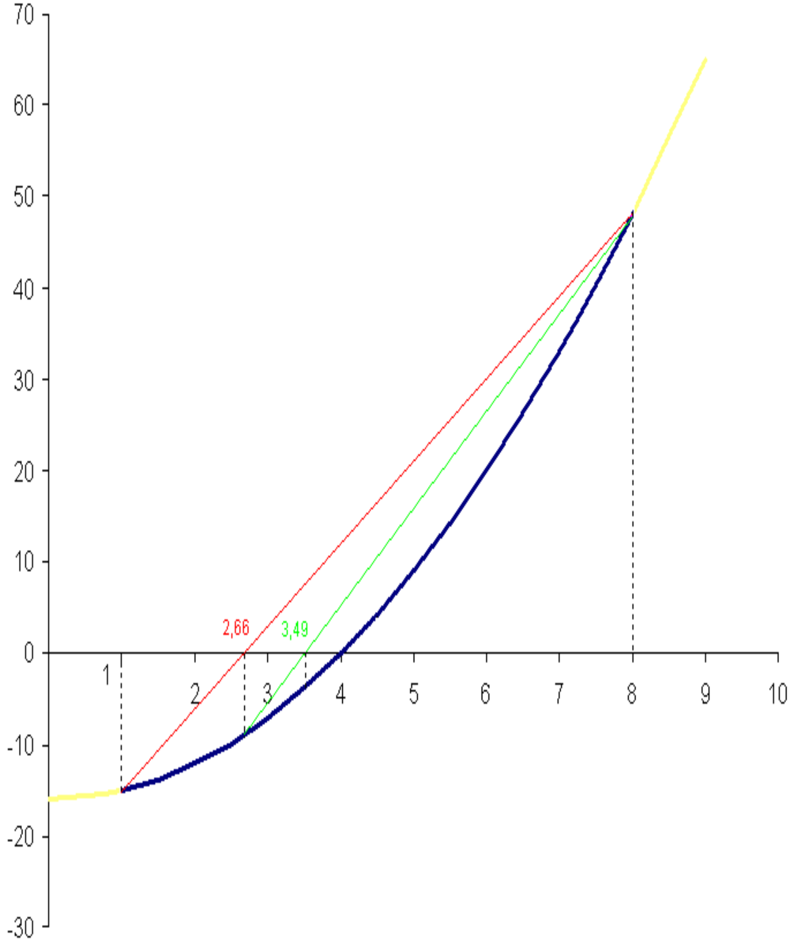
$x_4 = \frac{a+b}{2} = \frac{3{,}62+4{,}5}{2} = 4{,}062$

точність досягнута

Чисельний розв’язок рівнянь

МЕТОД ХОРД

Функція $y = x^2 - 16$ на інтервалі від 1 до 8



$x_0 = a = 1$

$x_1 = b = 8$

$$x_2 = x_1 - \frac{(x_1^2 - 16)\cdot(x_1 - x_0)}{(x_1^2 - 16) - (x_0^2 - 16)} = 8 - \frac{(8^2 - 16)\cdot(8 - 1)}{(8^2 - 16) - (1^2 - 16)} = 2{,}66$$

$$x_3 = x_2 - \frac{(x_2^2 - 16)\cdot(x_2 - x_1)}{(x_2^2 - 16) - (x_1^2 - 16)} = 2{,}66 - \frac{(2{,}66^2 - 16)\cdot(2{,}66 - 8)}{(2{,}66^2 - 16) - (8^2 - 16)} = 3{,}49$$

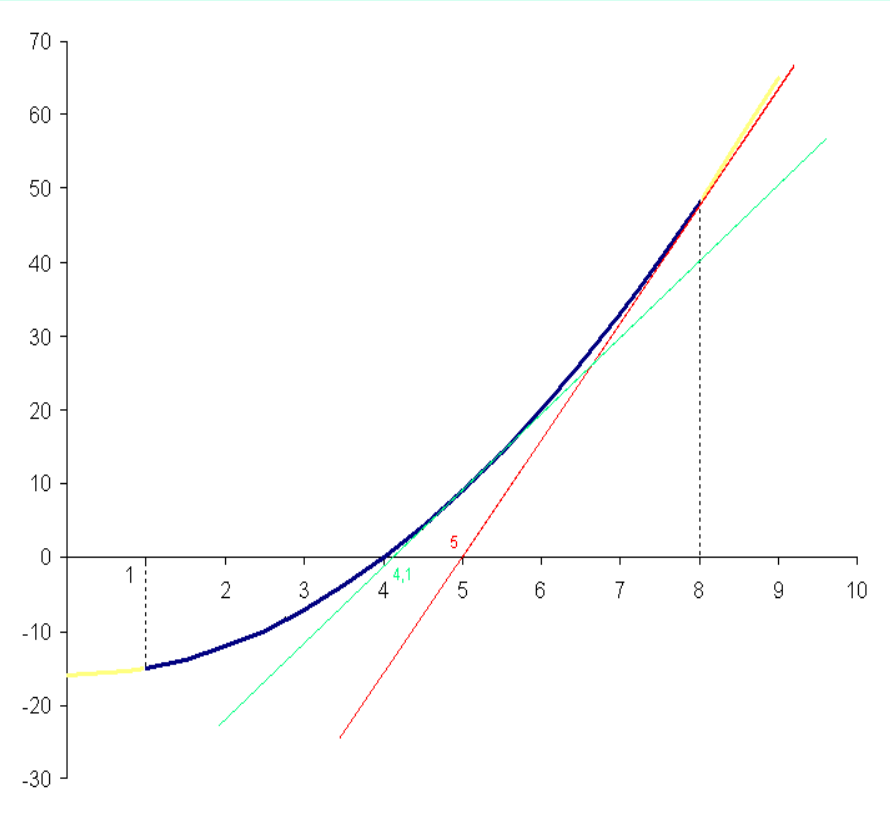
$$x_4 = x_3 - \frac{(x_3^2 - 16)\cdot(x_3 - x_2)}{(x_3^2 - 16) - (x_2^2 - 16)} = 3{,}49 - \frac{(3{,}49^2 - 16)\cdot(3{,}49 - 2{,}66)}{(3{,}49^2 - 16) - (2{,}66^2 - 16)} = 4{,}1$$

Точность досягнута

Чисельний розв’язок рівнянь

МЕТОД НЬЮТОНА (МЕТОД січних)

Функція $y = x^2 - 16$ на інтервалі від 1 до 8



$x_0 = 8$

$\Delta x = \varepsilon = 0{,}01$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)\cdot\Delta x}{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)} = 8 - \frac{(8^2-16)\cdot 0{,}01}{((8+0{,}01)^2-16)-(8^2-16)} = 5{,}00$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)\cdot\Delta x}{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)} = 5 - \frac{(5^2-16)\cdot 0{,}01}{((5+0{,}01)^2-16)-(5^2-16)} = 4{,}10$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)\cdot\Delta x}{f(x_2+\Delta x) - f(x_2)} = 4{,}1 - \frac{(4{,}1^2-16)\cdot 0{,}01}{((4{,}1+0{,}01)^2-16)-(4{,}1^2-16)} = 4{,}00$$

Точність досягнута