



АНАЛИЗ

ФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ В

ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАШИНАХ.

СИСТЕМА **FEMM**

Уравнения Максвелла

Название	Дифференциальная форма	Интегральная форма	Пояснение
Закон Ампера (обобщенный закон полного тока)	$\operatorname{rot} H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$	$\oint_L H dl = \int_S \left(J + \frac{\partial D}{\partial t} \right) dS$	Электрический ток и изменение во времени электрического поля порождают вихревое магнитное поле
Закон Фарадея (обобщенный закон электромагнитной индукции)	$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$	$\int_l E dl = -\int_S \frac{\partial B}{\partial t} dS$	Изменение магнитной индукции порождает вихревое электрическое поле в том же месте пространства
Теорема Гаусса	$\operatorname{div} D = \rho_{\text{своб.}}$	$\oint_S D dS = \int_V \rho_{\text{своб.}} dV$	Электрический заряд является источником электрической индукции
Теорема Гаусса	$\operatorname{div} B = 0$	$\oint_S B dS = 0$	Принцип непрерывности магнитного потока. Т.е. линии магнитной индукции замкнуты

Дополнительные уравнения электромагнитного поля для неподвижной среды

Электромагнитное поле известно, если в каждый момент времени в каждой точке пространства известны значения векторов напряженности эл. поля и магнитной индукции. Параметры среды, в котором определяется электромагнитное поле, учитываются в дополнительных уравнениях, которые вместе с четырьмя основными составляют полную систему уравнений электромагнитного поля для неподвижной среды.

$$D = \varepsilon_a E; \quad B = \mu_a H; \quad J = \gamma E,$$

где ε_a – абсолютная диэлектрическая проницаемость;

μ_a – абсолютная магнитная проницаемость;

γ – удельная проводимость.

Размерность введенных величин в системе СИ

ρ – плотность стороннего электрического заряда – Кл/м³

J – плотность электрического тока
(плотность тока проводимости) – А/м²

E – напряжённость электрического поля – В/м

H – напряжённость магнитного поля – А/м

D – электрическая индукция – Кл/м²

B – магнитная индукция – $Tл = \frac{Вб}{м^2} = \frac{кг}{А \cdot с^2}$

Переход к Декартовой системе координат

Пусть имеем $\bar{A}$ – вектор, а U – некоторая скалярная функция координат x, y, z .

Градиент – характеристика, показывающая направление наискорейшего возрастания некоторой величины, значение которой меняется от одной точки пространства к другой.

$$\text{grad } U = \bar{i} \frac{\partial U}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial U}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial U}{\partial z} = \nabla U$$

где $\nabla = \bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z}$ – набла оператор (оператор Гамильтона) – векторный дифференциальный оператор.

Дивергенция – дифференциальный оператор, который определяет (для каждой точки), «насколько расходятся входящий и исходящий поток». То есть, **дивергенция характеризует интенсивность источника в данной точке.**

В результате дивергенции векторное поле отображается на скалярное (то есть дивергенция это операция дифференцирования, в результате применения которой к векторному полю получается скалярное поле).

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{A}$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \nabla^2 U = \Delta U$$

где $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad} = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа (лапласи́ан) — дифференциальный оператор обозначающий плотность источников (стоков) потенциального векторного поля в данной точке.



Ротор, или вихрь – векторный дифференциальный оператор над векторным полем. Показывает, насколько и в каком направлении закручено поле в каждой точке.

$$\operatorname{rot} \bar{A} = \bar{i} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \bar{j} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \bar{k} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \nabla \times A$$

или

$$\operatorname{rot} \bar{A} = \nabla \times A = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times A = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Формы электромагнитного поля





Электростатическое поле – электрическое поле создаваемое совокупностью неподвижных в пространстве и неизменных во времени зарядов.

Основные уравнения электростатического поля:

$$\operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}} = 0; \quad \operatorname{div} \bar{\mathbf{D}} = \rho; \quad \bar{\mathbf{D}} = \varepsilon_a \bar{\mathbf{E}}$$

то же в Декартовой системе координат:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0; \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho; \quad \mathbf{D} = \varepsilon_a \mathbf{E}$$

Электростатическое поле является безвихревым (потенциальным).

Для упрощения расчета полей, которые соответствуют данным условиям, введем понятие электрического скалярного потенциала V . $\bar{\mathbf{E}} = -\operatorname{grad} V = -\nabla V$

В однородной и изотропной среде получаем уравнение

Пуассона для областей с объёмной плотностью зарядов ρ .

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} V = \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_a}$$

или уравнение **Лапласа** для областей без зарядов:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} V = 0$$



Стационарное электрическое поле – возникает внутри и вокруг проводников, при прохождении по ним постоянного тока.

Интенсивность этого поля зависит от разницы потенциалов между отдельными частями проводников с токами.

Внутри проводников напряженность эл. поля имеет только осевую тангенциальную составляющую, связанную с законом Ома в дифференциальной форме. В противном случае заряды непрерывно накапливались бы на поверхности проводника.

Кроме того, протекание постоянного тока вызывает появление магнитного поля.

Основные уравнения описывающие эти поля:

$$\operatorname{rot} \bar{H} = J; \quad \operatorname{div} \bar{B} = 0; \quad \bar{B} = \mu_a \bar{H}; \quad \bar{J} = \gamma \bar{E};$$

$$\operatorname{rot} \bar{E} = 0; \quad \operatorname{div} \bar{D} = \rho; \quad \bar{D} = \varepsilon_a \bar{E}$$

В зависимости от того, внутри или за пределами проводников исследуется стационарное поле, данная система уравнений распадается на четыре отдельных системы.

Электрическое поле		Магнитное поле	
Снаружи провода	Внутри провода	Снаружи провода	Внутри провода
$\nabla \times \bar{E} = 0$ $\bar{D} = \varepsilon_a \bar{E}$ $(\rho = 0)$ $\nabla \cdot \bar{D} = 0$	$\nabla \times \bar{E} = 0$ $\bar{J} = \gamma \bar{E}$ $\nabla \cdot \bar{J} = 0$ $(\nabla \cdot \bar{E} = 0)$	$\nabla \times \bar{H} = 0$ $\bar{B} = \mu_a \bar{H}$ $\nabla \cdot \bar{B} = 0$	$\nabla \times \bar{H} = \bar{J}$ $\bar{B} = \mu_a \bar{H}$ $\nabla \cdot \bar{B} = 0$



Магнитостатическое поле — магнитное поле, напряженность которого (по величине и направлению) не изменяется со временем; создается постоянными магнитами или постоянными электрическими токами.

Стационарное магнитное поле — магнитное поле, создаваемое постоянными токами как внутри так и снаружи проводников.

Энергия магнитного поля

Снаружи проводников

$$W_m = \frac{\mu H^2}{2}$$

Внутри проводников

$$W_m = \frac{\bar{B} \times \bar{H}}{2}$$

Переменное электромагнитное поле

Уравнения переменного электромагнитного поля для однородной изотропной среды.

$$\operatorname{rot} \bar{H} = \bar{J}; \quad \operatorname{rot} \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

$$\bar{J} = \sigma \bar{E} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} + \sigma(\mathbf{v} \times \bar{B}) + \sigma \bar{E}_{\text{внеш}} + \rho \mathbf{v}_p + \operatorname{rot}(\bar{D} \times \bar{v})$$

Последнее уравнение – это полное уравнение электромагнитного поля для проводящей, однородной, движущейся среды. Уравнение позволяет определить плотность полного тока, который обусловлен такими составляющими:

- 1) $\sigma \bar{E}$ – определяет индуцированную плотность тока в электропроводящей среде (σ – электропроводность).

2) $\frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t}$ – плотность тока диэлектрического смещения.

3) $\sigma(\bar{\mathbf{v}} \times \bar{\mathbf{B}})$ – «конвективная составляющая» плотности тока, обусловленная движением электропроводной среды со скоростью $\mathbf{v}$ относительно магнитного поля с индукцией $\mathbf{B}$.

4) $\sigma \bar{\mathbf{E}}_{\text{внеш}} = \bar{\mathbf{J}}_{\text{внеш}}$ – плотность тока от внешних ЭДС.

5) $\rho \mathbf{v}_p$ – плотность тока переноса свободных зарядов.

6) $\text{rot}(\bar{\mathbf{D}} \times \bar{\mathbf{v}})$ – «конвективная составляющая» плотности тока, обусловленная движением поляризованного диэлектрика.



При анализе электромагнитных полей в электрических машинах принимают следующие, характерные для их конструкции, допущения:

- 1) Токи диэлектрического смещения отсутствуют $\frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial t} = 0$
- 2) Отсутствуют составляющие токов переноса $\rho \mathbf{v}_p = 0$ и токов, обусловленных движением поляризованного диэлектрика $\text{rot}(\bar{\mathbf{D}} \times \bar{\mathbf{v}}) = 0$.
- 3) Отсутствуют токи проводимости в шихтованных магнитопроводах ЕМ. Считается, что вихревые токи в листах шихтованных магнитопроводов не влияют на характер распределения поля в активной зоне машины.
- 4) Пренебрегается явлением гистерезиса в ферромагнитных материалах.

С учётом принятых допущений, а также введя понятие векторного магнитного потенциала получим общее уравнение нестационарного электромагнитного поля для электропроводной движущейся среды.

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$$

Тогда

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \left(\nabla \times \frac{\mathbf{A}}{\mu_a} \right) = \mathbf{J}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\Delta V}{L}$$

$$\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \times \left(\nabla \times \frac{\mathbf{A}}{\mu_a} \right) - \sigma \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \sigma \frac{\Delta V}{L} + \mathbf{J}_{\text{внеш}}$$

Для симметричных обмоток ЕМ значение градиента скалярного электрического потенциала равно нулю $\text{grad} V = \nabla V = \frac{\Delta V}{L} = 0$.

При протекании по обмотке машины гармонического тока можно перейти к квазистатическому режиму.

$$j\omega\sigma A + \Delta \times \frac{A}{\mu_a} - \sigma v \times (\nabla \times A) = J_{внеш}$$

Если использовать роторную систему координат и пренебрегать взаимным перемещением пазов статора и ротора, то «конвективная составляющая» плотности тока исчезает, а частота изменения тока равна частоте скольжения.

$$j\omega S \sigma A + \Delta \times \frac{A}{\mu_a} = J_{внеш}$$

Для стационарных 2-D электромагнитных полей или для не электропроводных сред ($\sigma=0$) имеем уравнение Пуассона:

$$\Delta \times A = \mu_a J_{внеш}$$

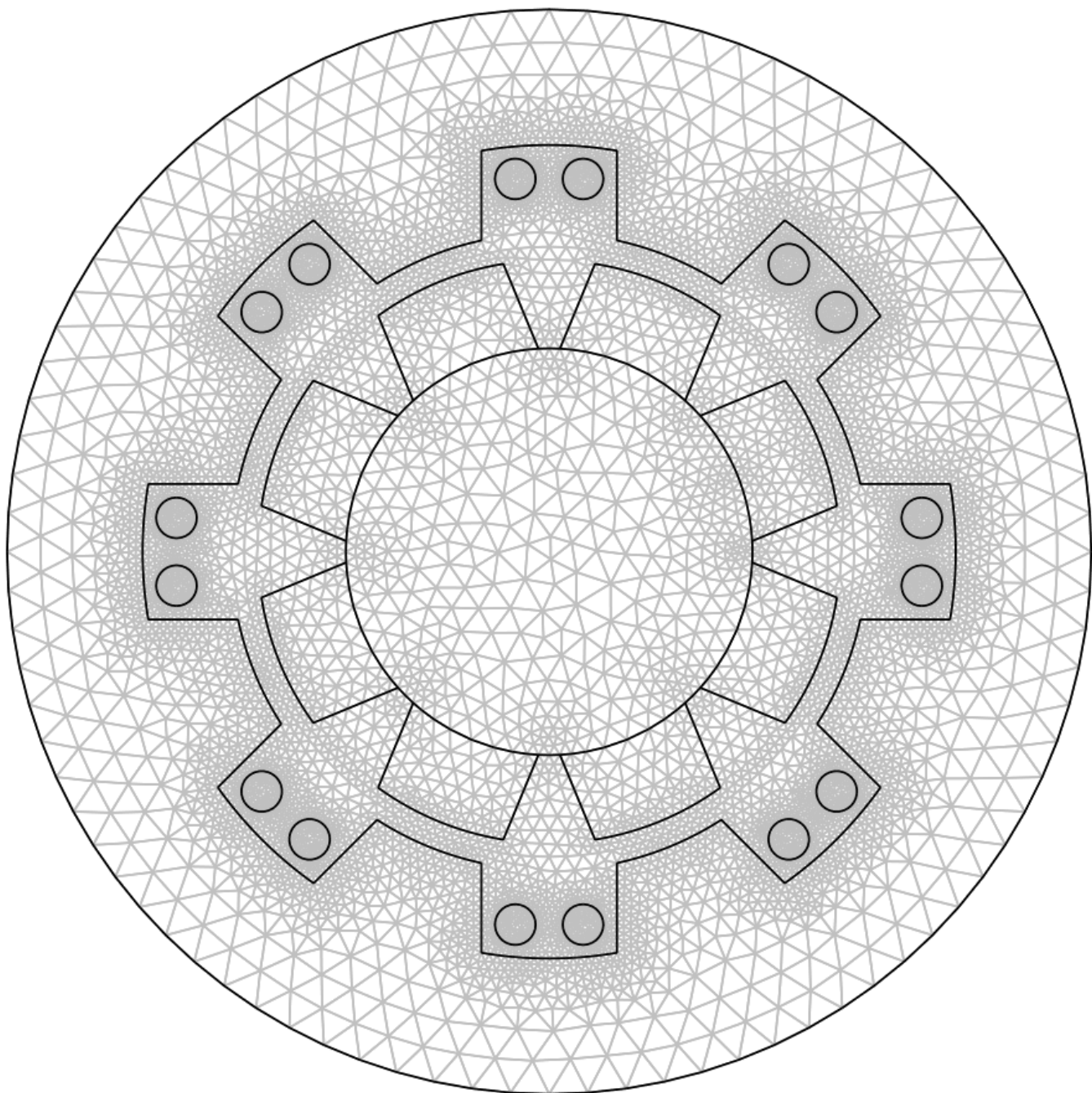


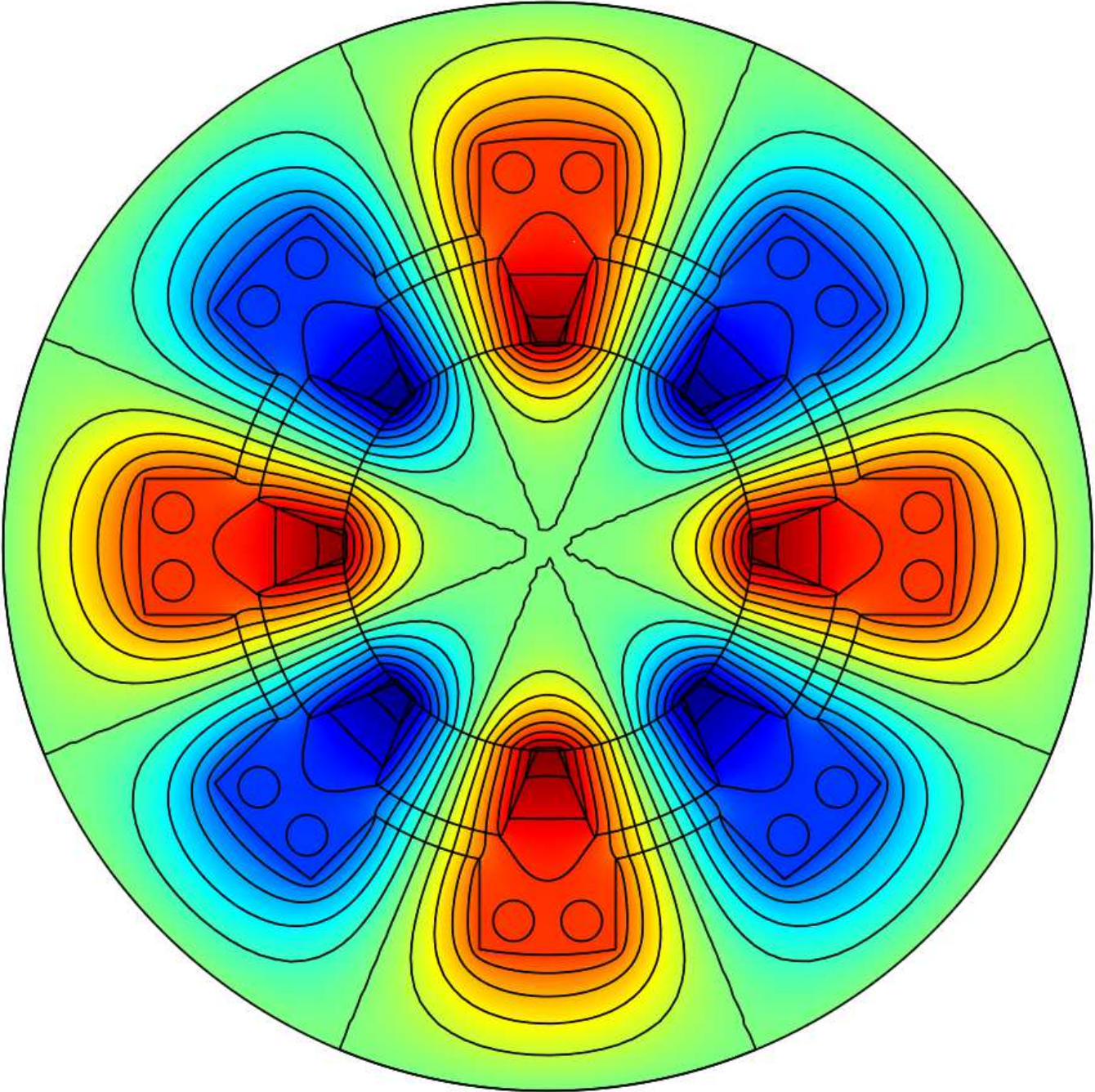
Метод конечных элементов

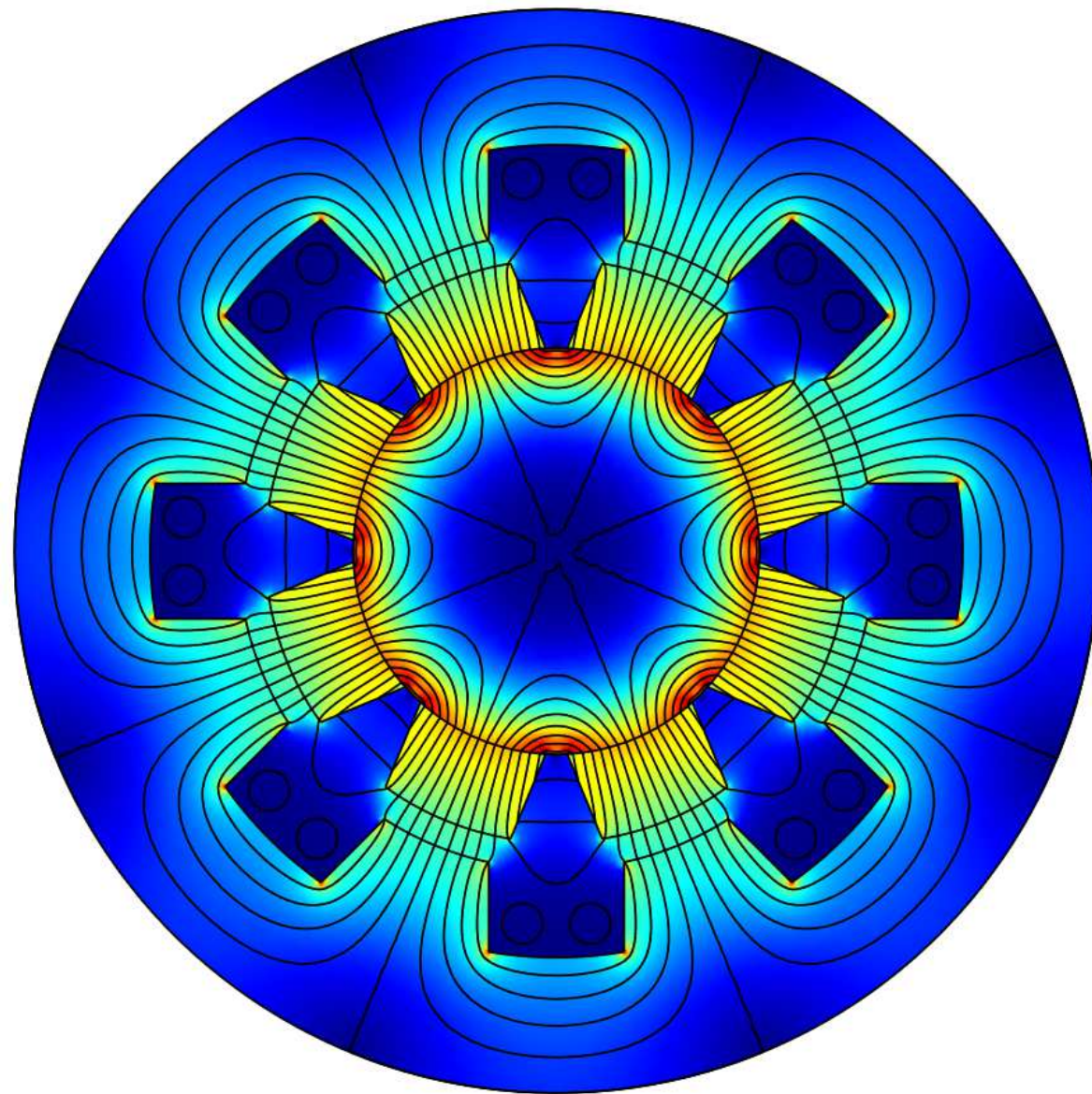
Метод конечных элементов (МКЭ) — общий метод численного решения дифференциальных уравнений или СДУ для задач электромагнетизма, теплообмена, прикладной механики и др.

Идея метода конечных элементов заключается в том, что область, в которой нужно найти решение задачи, разбивается на треугольные (1-го порядка) или четырехугольные (2-го порядка) элемента. После этого осуществляется аппроксимация потенциала внутри каждого элемента и подбор таких распределений потенциала в различных элементах, при которых сохранялась бы его непрерывность во всей области определения.

Таким образом, истинное решение заменяется кусочно-планарной функцией.







Max: 1.17

1

0.8

0.6

0.4

0.2

Min: 5.419e-5

Граничные условия

Существует 5 вариантов граничных условий для анализа электромагнитных полей:

- 1) **Условие Дирихле (1-го рода).** Значение векторного A или скалярного потенциала V явно определены на границе, например $A=0$.
- 2) **Условие Нэймана (2-го рода).** Определяет нормальную производную потенциала вдоль границы. Например, условие $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$ означает прохождение магнитного потока через границу под углом 90° к ней.
- 3) **Условие Робина (3-го рода).** Является сочетанием условий Дирихле и Нэймана и представляет собой отношение между значением A и его нормальной производной на границе. Например, условие $\frac{\partial A}{\partial n} + cA = 0$ позволяет моделировать безграничную область (к примеру, теплоотдача с поверхности).



4) **Условие симметрии.** Объединяет две границы вместе. В этом случае, параметры в соответствующих точках на обеих границах равны по величине и по знаку.

5) **Условие антисимметрии.** Также объединяет две границы вместе. При этом, параметры в соответствующих точках на обеих границах равны по величине, но противоположны по знаку.

