

4.5. Спектральный анализ

$y = \mathbf{fft} (x, n)$ – осуществляет прямое дискретное преобразование Фурье.

$x = \mathbf{ifft} (y, n)$ – осуществляет обратное дискретное преобразование Фурье.

Прямое и обратное преобразование Фурье осуществляется по формулам:

$$y(k) = \sum_{m=1}^n x(m) \cdot e^{j \cdot 2\pi(m-1)(k-1)/n};$$

$$x(m) = \sum_{k=1}^n y(k) \cdot e^{j \cdot 2\pi(m-1)(k-1)/n}$$

где j – обозначение мнимой единицы; n – число элементов заданного вектора \mathbf{x} и \mathbf{y} ;

Замечания:

- a) номер m отвечает моменту времени t_m , в который измерен входной сигнал $x(m)$; при этом $t_1=0$;
- b) номер k – это индекс значения частоты f_k которому отвечает найденный элемент $y(k)$ дискретного преобразования Фурье;
- c) чтобы перейти от индексов к временной и частотной областям, необходимо знать значение h шага времени, через который измерен входной сигнал $x(t)$ и промежуток T времени, на протяжении которого он измеряется; тогда шаг по частоте в изображении Фурье определится соотношением:

$$D_f = 1/T,$$

а диапазон изменения частоты – формулой

$$F = 1/h;$$

d) из формулы $y(k)$ следует, что индексу $k=1$ отвечает нулевое значение частоты ($f_0=0$); иначе говоря, первый элемент вектора $y(1)$ является просто суммой всех заданных значений вектора x ; отсюда получаем, что вектор $y(k)$ содержит значение Фурье-изображения, начиная от частоты $f_0=0$ до максимальной частоты $f_{max} = F$ (которой отвечает $k = n$).

Пример:

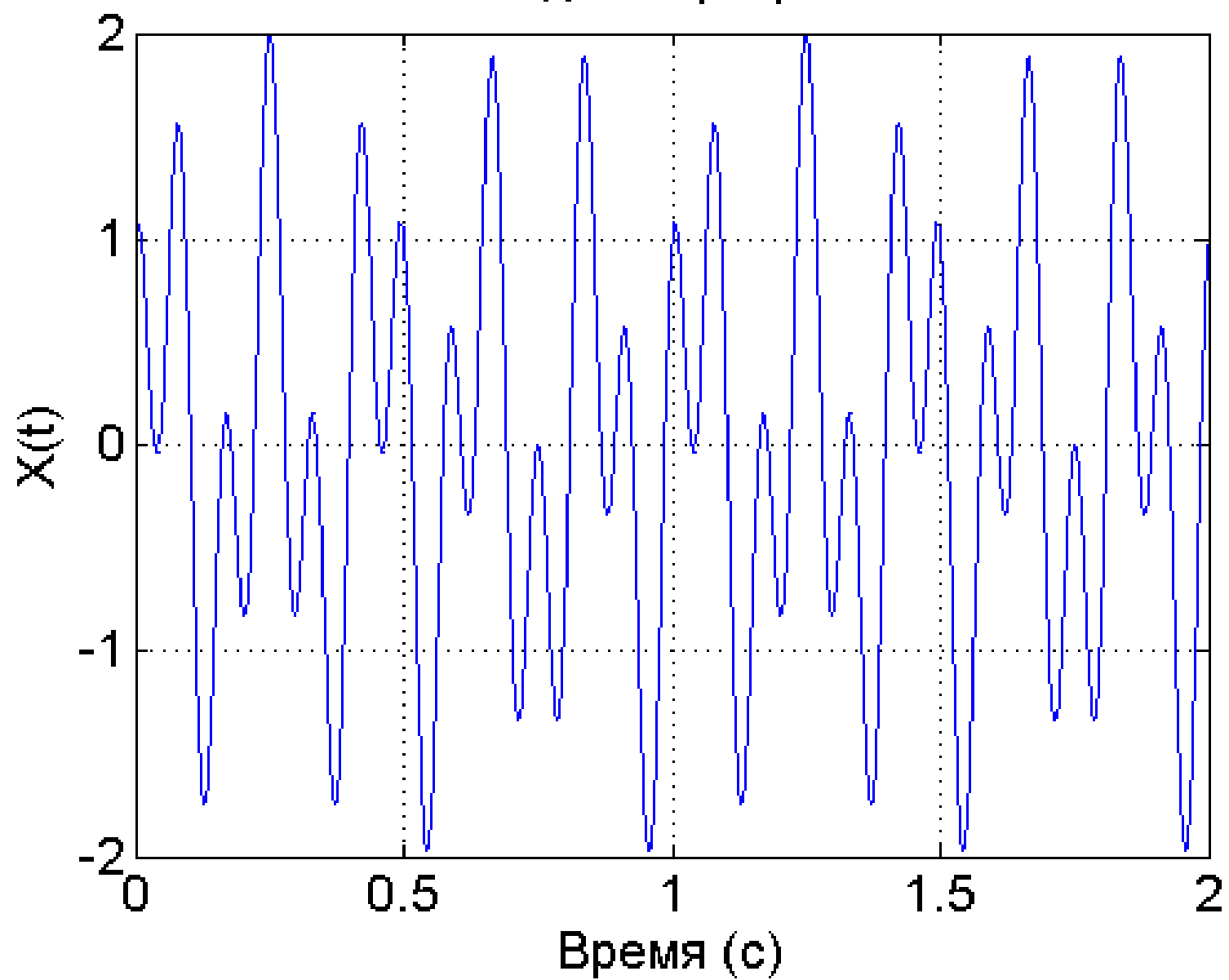
Сформируем входной сигнал в виде суммы двух синусоид с частотами 5 и 12 Гц.

```
>> t=0:0.001:2;
```

```
>> x=sin(2*pi*5*t)+cos(2*pi*12*t);
```

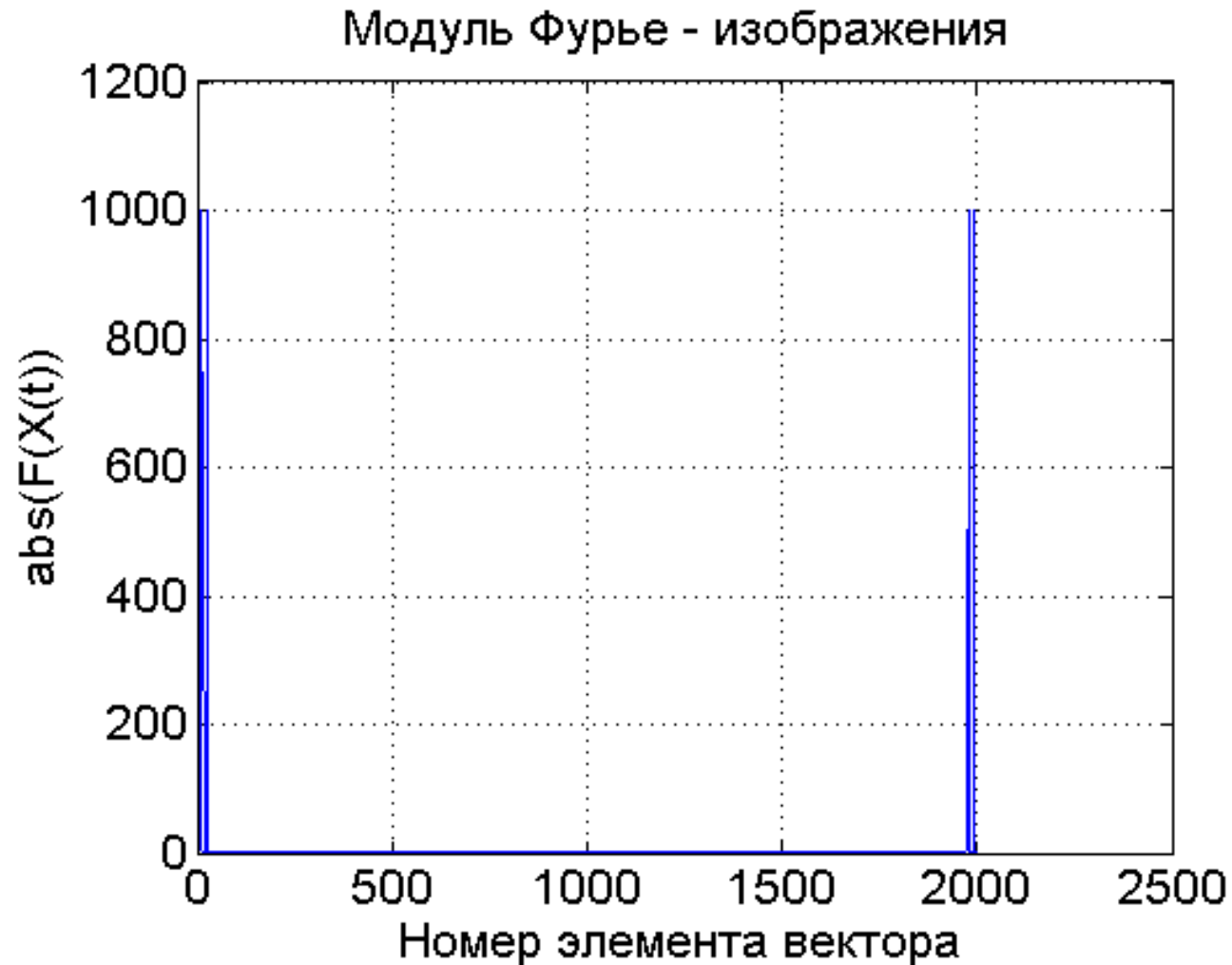
В этом случае $h = 0.001$, $T = 2$, $n = 2001$, $D_f = 0.5$;
 $F = 1000$

Входной процесс



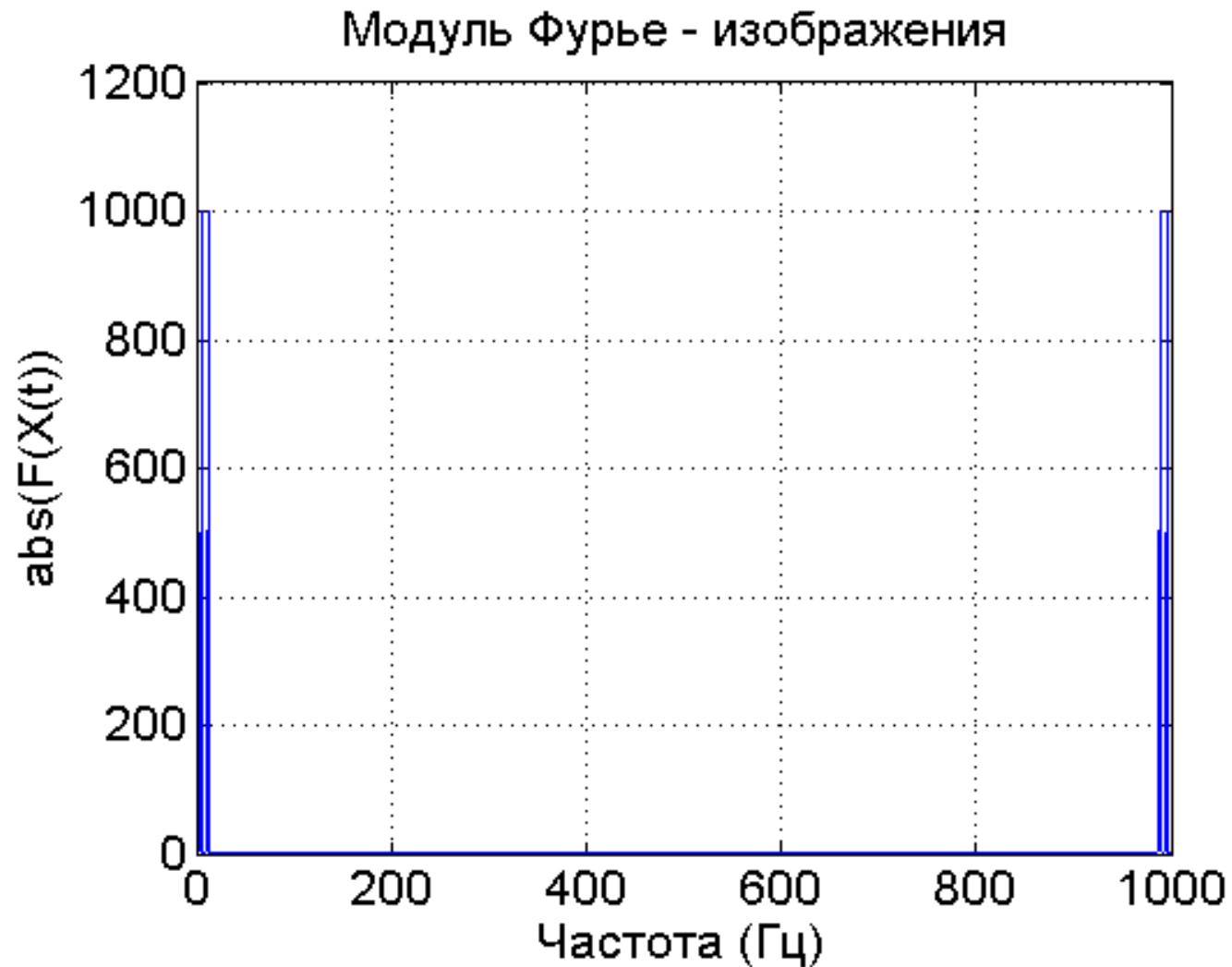
Найдем Фурье-изображение этого сигнала


```
>> y = fft(x);  
>> a = abs(y);  
>> plot(a); grid
```



Сформируем массив частот исходя из того, что $D_f = 0.5$; $F = 1000$

```
>> f=0:0.5:1000;
```



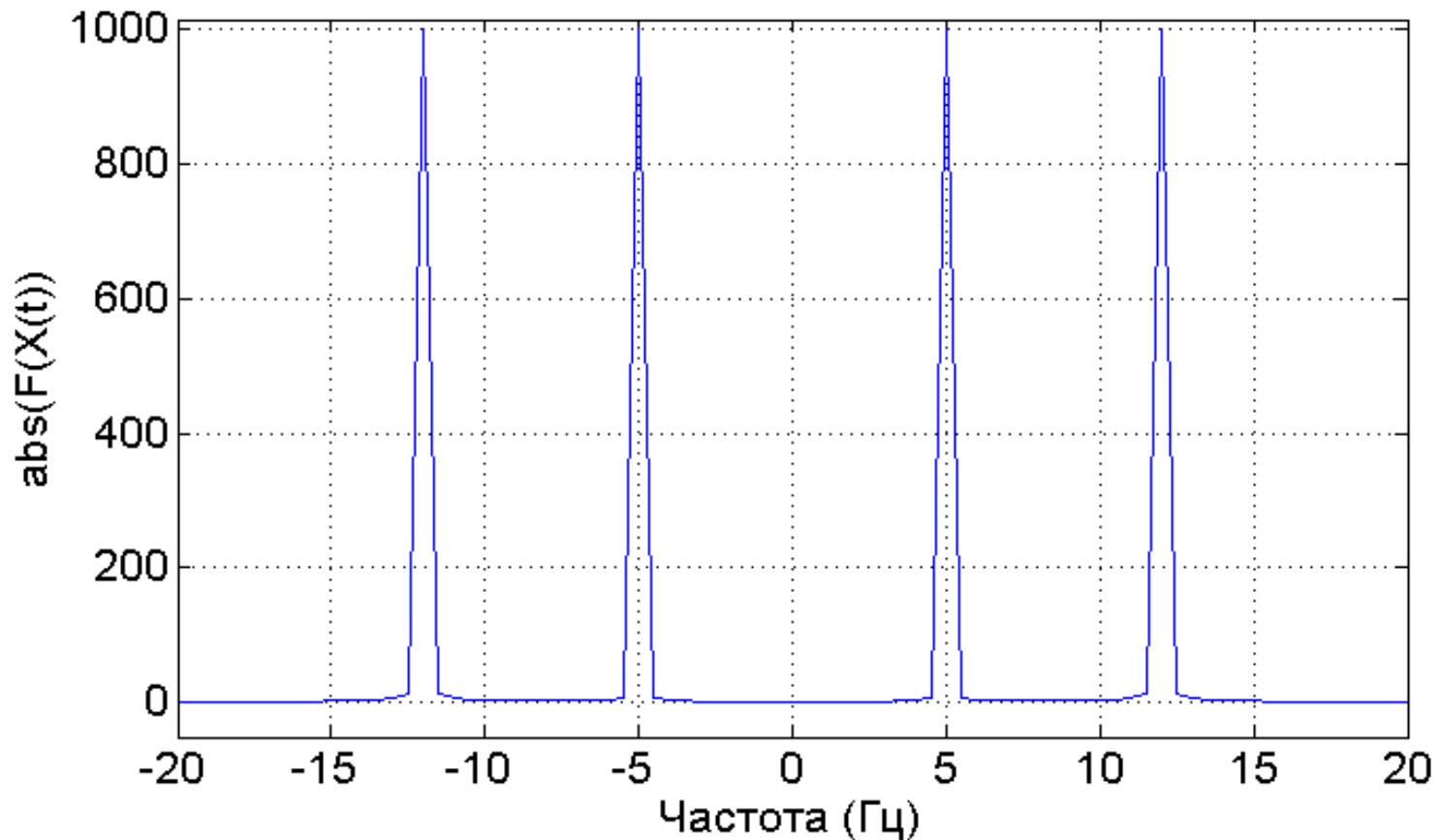


Как видно из рисунка, по нему непросто распознать те частоты (5 и 12 Гц), с которыми изменяется входной сигнал. Это – следствие того обстоятельства, что Фурье-изображение определяется только для *положительных частот* в диапазоне от 0 до F ; более удобным и привычным представляется переход к вектору Фурье-изображения, определенному в диапазоне частот от $(-F/2)$ до $F/2$; частота $F_N = F/2$ получила название *частоты Найквиста*.

Поэтому, чтобы определить реальный частотный спектр входного сигнала, нужно сначала преобразовать полученный вектор \mathbf{y} Фурье-изображения с помощью процедуры *fftshift*, которая переставляет вторую половину вектора \mathbf{y} в первую половину.

```
>> f1 = -500:0.5:500;  
>> v = fftshift(y);  
>> a = abs(v);  
>> plot(f1(970:1030), a(970:1030)); grid
```

Модуль Фурье - изображения

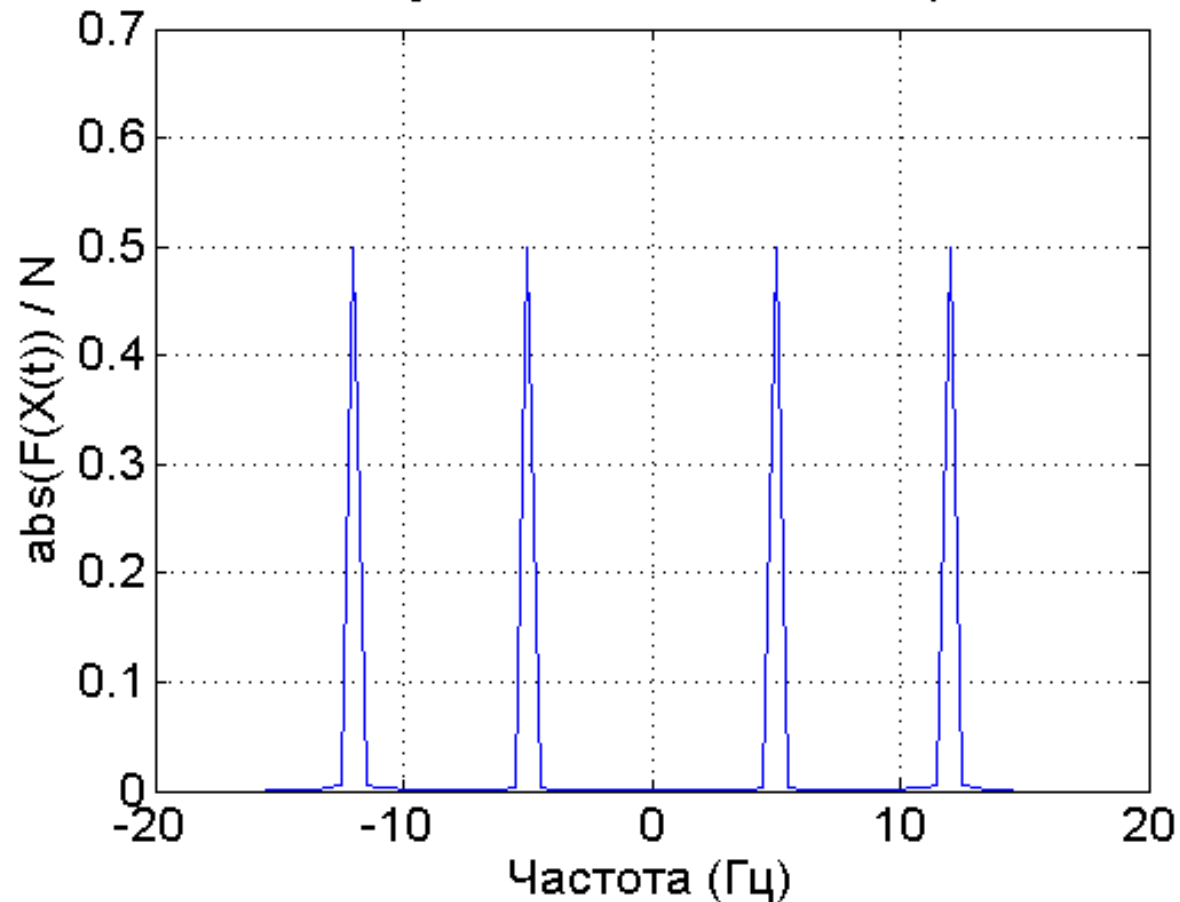



Для установления реальных амплитуд гармоник
нужно весь вектор \mathbf{y} Фурье-изображения разделить
на число его элементов (n).

```
>> N=length(y); a = abs(v)/N;
```

```
>> plot(f1(970:1030), a(970:1030)); grid
```

Модуль комплексного спектра



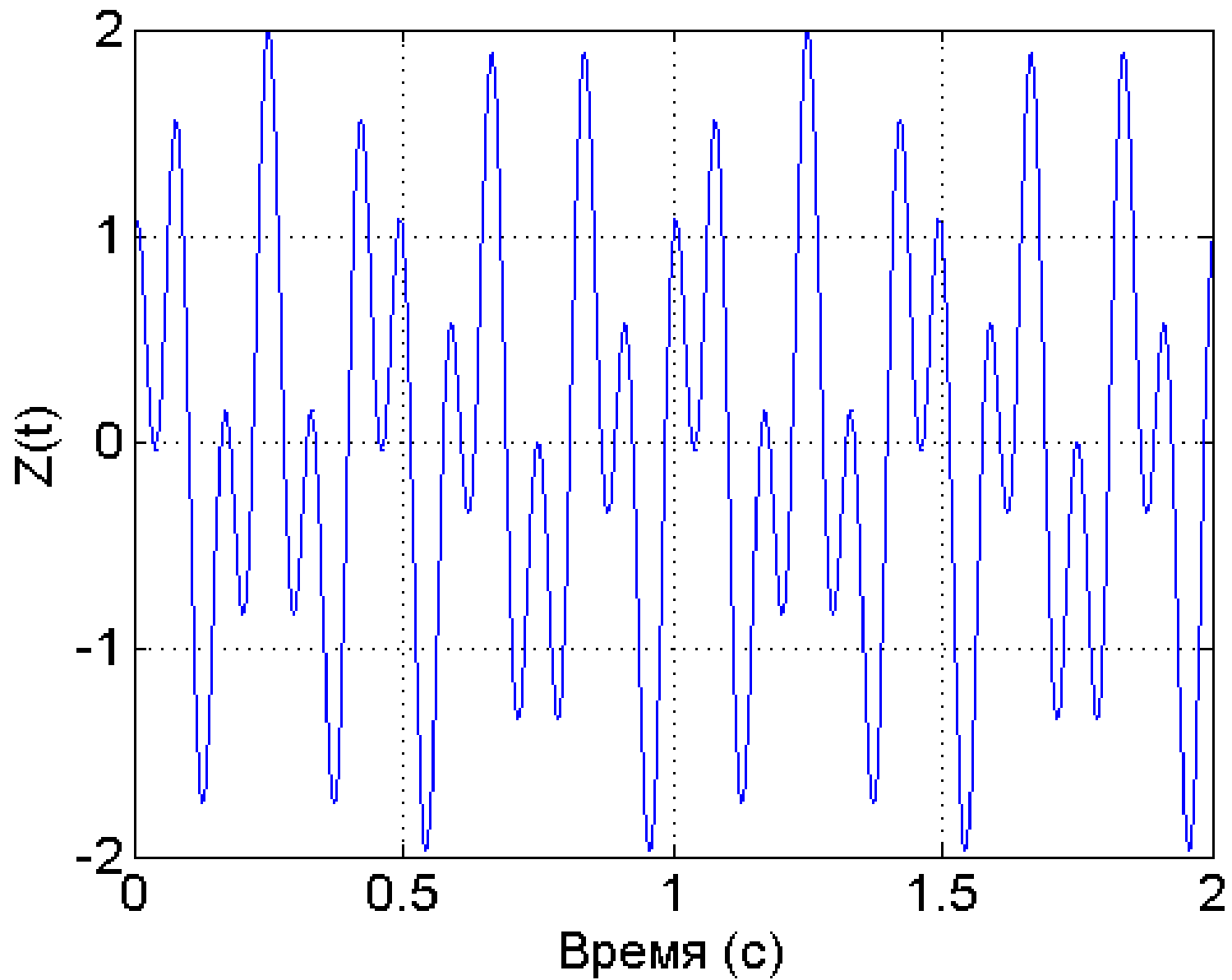


Из графика вытекает, что "амплитуды" всех составляющих гармоник равны 0.5. При этом нужно принять во внимание, что "амплитуды" распределены между положительными и отрицательными частотами поровну, поэтому они вдвое меньше действительной амплитуды соответствующей гармоники.

Обратное преобразование с осуществляется помощью функции *ifft*. При этом необходимо использовать исходный массив *y*, а не обращённый *v*.

```
>> z = ifft(y);  
>> plot(t, z); grid
```

Обратное Фурье-преобразование



Листинг программы спектрального анализа

```
T=2; % Промежуток времени измерения
h=0.001; % Шаг по времени измерения
t=0:h:T; % Временной диапазон
x=sin(2*pi*5*t)+cos(2*pi*12*t); % Входной сигнал
y=fft(x); % Фурье-изображение входного сигнала
Df=1/T; % Шаг по частоте
F=1/h; % Максимальная частота
f=0:Df:F; % Формирование вектора частот
f1=-F/2:Df:F/2; % Перестройка вектора частот
v=fftshift(y); % Перестройка вектора Фурье-
изображения
a=abs(v); % Модуль перестроенного Фурье-изображения
N=length(y); % Определение числа элементов Фурье-
изображения
a=2*abs(v)/N; % Определение реальных амплитуд
гармоник
stem(f1(1001:1030),a(1001:1030)); grid %
Построение графика
```

